

C^* -Algebren II

(C^* -Algebras and K-theory)

§ 1 Gruppen- C^* -Algebren

Motivation: Sei G eine lokalkompakte Gruppe. Ist G abelsch, so kann zu G die duale Gruppe $\hat{G} := \{ \chi : G \rightarrow \mathbb{T} \mid \chi \text{ stetiges Gruppenhom.} \}$ assoziiert werden, die wieder lokalkompakt ist. (Peters. Multipl. auf $\hat{G}$ und gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Teilmengen macht $\hat{G}$ zu einer lokalkompakten Gruppe)

Die Pontryagin-Dualität besagt, dass $G \xrightarrow{x \mapsto \text{ev}_x} \hat{\hat{G}}$ ein

Isomorphismus von topol. Gruppen ist, mit anderen Worten:

$G \hookrightarrow \hat{\hat{G}}$ sind dual, d.h. alle Information über G ist in

$\hat{\hat{G}}$ enthalten. Bsp.: $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{T} = \hat{\mathbb{Z}}$ („Fouriertransf.“), $\hat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\hat{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}$ [1]

- Was ist, wenn G nicht abelsch ist?

$\hat{G}$ enthält dann zu wenig Information, betrachte daher

($G \rightarrow \mathcal{L}(H)$ unitäre Darstellungen) als Verallgemeinerung von $\hat{G}$.

Die Tannaka-Krein-Dualität besagt, dass eine kompakte (nicht notwendig abelsche) Gruppe aus ihren Darstellungen rekonstruiert werden kann. (Auch: Peter-Weyl) [1,2]

- Fazit: Um allgemein lokalkompakte Gruppen zu verstehen, ist es sinnvoll ihre Darstellungen zu studieren.

Literatur zur Motivation:

- [1] Thomas Timmermann, An Invitation to Quantum Groups and Duality, EMS Textbooks in Mathematics, 2008.
(eher in Brehm Quantengruppen, aber siehe §.3/4 und §. 104/105)

- (guter historischer Abriss des Zusammenhangs von C^* -Algebren und Gruppen, siehe Anfang 81, Anfang 82)
- [2] A. Joyal, R. Street, An Introduction to Tannaka Duality and Quantum Groups, in Category Theory, Lect. Notes in Math. 1488, Springer, 1991
(auch über Quantengruppen, aber siehe Introduction und §1)
- [3] J. Rosenberg, C^* -Algebras and Mackey's theory of group representations, in C^* -Algebras 1983-1993. A Fifty Year Celebration, Contemp. Math. 167, AMS 1994

Die Theorie der Operatoralgebren kann also beim Verständnis von Gruppen helfen. Hierzu gibt es verschiedene Ansätze:

- Betrachte $C_0(G)$ als „Koordinatenfunktion“ über G (z.B. $G \subseteq M_n(\mathbb{C})$ Matrixgruppe, wie $G = S_n = \{\text{Permutationen von } \{1, \dots, n\}\}$ oder $G = O_n$, $G = U_n$ also orthogonale bzw. unitäre Matrizen - dann ist $C_0(G)$ gegeben durch die Koordinatenfunktion $f_{ij}: G \rightarrow \mathbb{C}$ $g \mapsto u_{ij}$.) $\leadsto$ führt zu Konzept der Quantengruppen
- Betrachte $C_{(max)}^*(G)$ und $C_{red}^*(G)$, die volle und die reduzierte Gruppen- C^* -Algebra. Diese spiegeln die Gruppenstruktur und ihre Darstellg. besser wider.
- Betrachte Von-Neumann-Algebren wie $L^\infty(G)$ oder $L(G)$. [1]

Wir betrachten hier $C^*(G)$ und $C_{red}^*(G)$.

- Die Gruppen- C^* -Algebren $C^*(G)$ und $C_{red}^*(G)$ sind aus folgenden Gründen interessant:

- Ihre Darstellungstheorie ist eng mit der der zugehörigen Gruppe verknüpft (s. obige Motivation).
- Sie liefern gute Beispiele von C^* -Algebren (auch im Zusammenhang mit verstreuten Produkten, die in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung von Gruppen- C^* -Algebren darstellen) und bieten einen guten Übergang zu Von-Neumann-Algebren (hauptsächlich $C_{red}^*(G)$).
- Historisch gesehen waren sie einer der Hauptbeweggründe, die Theorie der C^* -Algebren überhaupt zu entwickeln, und sie sind immer noch ein sehr aktives Anwendungsgebiet. 1943 gab es zeitgleich den „älteren“ Artikel zu C^* -Algebren von Gelfand Naimark, wie auch einen Artikel von Gelfand und Raikov über unitäre Darstellungen lokal kompakter Gruppen, was später (u.a. von Segal) noch deutlicher zusammengeführt wurde. [3]

Bew. Mit Fubini steht man ds. Interv.

$$\int_G |f * g(s)| ds \leq \int_G \int_G |f(t)| |g(t^{-1}s)| ds dt \stackrel{\downarrow}{=} \int_G |f(t)| \left(\int_G |g(s)| ds \right) dt \\ \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

D.h. $f * g$ ist f.ü. definiert und $\in L^1(G)$, $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.
Die Faltung ist außerdem assoziativ.

Δ ist ein stetiger Gruppenhom., also $f^{\Delta}(s) = \Delta(s)^{-1} \overline{f^{\Delta}(s^{-1})}$
 $= \Delta(s^{-1}) \Delta(s^{-1})^{-1} f(s) = f(s).$

1.6 Bem.: (a) Ist G abelsch oder diskret oder kompakt, so ist $\Delta \equiv 1$.
 G heißt dann unimodular.

(b) Ist G diskret, so ist μ_G das Zählmaß ^(nach Normalisierung) und für charakteristische Funktionen δ_t , $t \in G$ ist $\delta_{t_1} * \delta_{t_2}(s) = \sum_{g \in G} \delta_{t_1}(g) \delta_{t_2}(g^{-1}s) = \delta_{t_1 t_2}(s)$
 und dementsprechend $\sum_i \alpha_i \delta_{t_i} * \sum_j \beta_j \delta_{s_j} = \sum_{ij} \alpha_i \beta_j \delta_{t_i s_j}$.

Die Faltung entspricht also exakt der Gruppenverknüpfung. Anl.: $\delta_s^{\Delta} = \delta_s$.

(c) Es gilt $C_c(G) \in L^1(G)$, da das Haarmaß endlich ist auf kompakten Mengen. $C_c(G)$ ist sogar abelsch $\in L^1(G)$.

(d) Für jede Gruppe G kann die Gruppenalgebra $\mathbb{C}G$ betrachtet werden, die aus formalen endlichen Linearkombinationen $\sum_t \alpha_t t \mapsto (\sum_t \alpha_t t) (\sum_s \beta_s s) = \sum_{st} \alpha_t \beta_s st$ besteht.

Ist G diskret, so ist $\mathbb{C}G = C_c(G) \mapsto \sum_t \alpha_t t \leftrightarrow \sum_t \alpha_t \delta_t$.

$L^1(G)$ ist also die Vervollständigung von $\mathbb{C}G$ zu einer Banachalgebra.

Ist G endlich, so ist $\mathbb{C}G = L^1(G)$.

1.7 Prop.: Sei G lokal-kompakt.

(a) G ist diskret $\Leftrightarrow L^1(G)$ ist unital $\Leftrightarrow \mu_G(\{e\}) > 0$

(b) G ist kommutativ $\Leftrightarrow L^1(G)$ kommutativ

Beweis: (a) Ist G diskret, so ist $\{e\}$ offen, also $\mu_G(\{e\}) \neq 0$.
 (o.E. "1")
 Dann ist δ_e ein Einselement. Andere Richtungen formalisier.

(b) Ist G diskret, so ist das nach Bem. 1.6(b) trivial.

$$(f := -\delta_{t^{-1}} + \delta_e + \delta_t \cdot \|f\|^2 = 1) \quad 1-5$$

1.8 Bem.: $L^1(G)$ mit $\|\cdot\|_1$ ist keine C^* -Algebra. Es gibt aber zwei kanonische Wege um aus einer $\mathbb{C}$ -Banachalgebra (die eine approximierende Eins besitzt, was auf $L^1(G)$ für lokal kompakte Gruppen zutrifft) eine C^* -Algebra zu machen. [Dir, 2.7.1]

1.9 Def. Sei G lok. komp.

Zu $f \in L^1(G)$ setze $\|f\| := \sup \{ \|\pi(f)\| \mid \pi \text{ Darstellung von } L^1(G) \} \leq \|f\|_1$.
Die (volle oder maximale) Gruppen- C^* -Algebra $C^*(G)$ (auch $C_{max}^*(G)$, $C_f^*(G)$) ist die Vervollständigung von $L^1(G)$ bzgl. dieser Norm.

1.10 Prop.: Sei G lok. komp.

- (a) Jede unitäre Darstellung π von G induziert eine Darstellung von $L^1(G)$. (Es gilt sogar $\{\text{unitäre Darst. von } G\} \xrightarrow{\text{inj}} \{\text{nichttriviale Darst. von } L^1(G)\}$)
- (b) Die linkereguläre Darstellung $\lambda: G \rightarrow \mathcal{L}(L^2(G))$, gegeben durch $(\lambda(s)f)(t) := f(s^{-1}t)$ setzt sich zu einer Darstellung von $L^1(G)$ fort. (freuen)
- (c) $\|\cdot\|$ aus 1.9 ist eine Norm.

Bew.: (a) Für $f \in L^1(G)$ setze $\tilde{\pi}(f) := \int_G f(t) \pi(t) dt$, d.h.

$$(\tilde{\pi}(f)\xi|\eta) := \int_G f(t) (\pi(t)\xi|\eta) dt. \text{ Ist } G \text{ diskret und}$$

$$f = \sum \alpha_t \delta_t \in \mathbb{C}G \subseteq L^1(G), \text{ so ist } \tilde{\pi}(f) = \sum \alpha_t \pi(t).$$

$$\text{Es gilt } \tilde{\pi}(f \cdot g) = \tilde{\pi}(f) \tilde{\pi}(g), (\tilde{\pi}(f)\xi|\eta) = (\tilde{\pi}(f^*)\xi|\eta), \|\tilde{\pi}(f)\| \leq \|f\|_1.$$

(b) λ ist eine Gruppenhom. und $\lambda(s)$ ist unitär, für $s \in G$, da μ_G linksinvar. ist (also ist $\lambda(s)$ isometrisch).

Also ex. eine Fortsetzung $\tilde{\lambda}: L^1(G) \rightarrow \mathcal{L}(L^2(G))$.

(Ist G diskret, so ist $\lambda(s) \delta_t = \delta_{s^{-1}t} = \delta_{sr}$, d.h. $\lambda(s) \delta_v = \delta_{sr}$.)
1.12(a) λ ist also wieder einfach l.h.p. eine Linksmultiplikation, s. G.N.S.)

Sei G diskret, $0 \neq f \in L^1(G)$. Also ex. $s \in G$ mit $f(s) \neq 0$. Dann

$$(\tilde{\lambda}(f) \delta_e | \delta_s) = \int_G f(t) (\underbrace{\lambda(t) \delta_e | \delta_s}_{\delta_t} dt = f(s) \neq 0 \Rightarrow \tilde{\lambda}(f) \neq 0.$$

L(c) $f \neq 0 \Rightarrow \tilde{\lambda}(f) \neq 0 \Rightarrow \|f\| \neq 0$

1.11 Def. Die reduzierte Gruppen- C^* -Algebra $C_{\text{red}}^*(G)$ ist definiert als $C_{\text{red}}^*(G) := \overline{\tilde{\lambda}(L^1(G))} \subseteq \mathcal{L}(L^2(G))$.

1.12 Bem. (a) Ist G diskret, so ist $\lambda(s)\delta_r(t) = \delta_r(s^{-1}t) = \delta_{sr}(t)$,
allgemein $\tilde{\lambda}(f)g = f * g$ für $f \in L^1(G)$, $g \in L^2(G)$.

$$\left(\tilde{\lambda}\left(\sum_t \alpha_t \delta_t\right)\left(\sum_s \beta_s \delta_s\right)\right) = \sum_{s,t} \alpha_t \beta_s \lambda(t)\delta_s = \sum_{s,t} \alpha_t \beta_s \delta_{ts} = \left(\sum_t \alpha_t \delta_t\right) * \left(\sum_s \beta_s \delta_s\right)$$

Die linksreguläre Darstellung ist also einfach nur die Linksmultiplikation, wie bei der GNS-Konstruktion.

(b) Die rechtsreguläre Darstellung $\rho: G \rightarrow \mathcal{L}(L^2(G))$, gegeben durch $(\rho(s)f)(t) := \Delta^{\frac{1}{2}}(s)f(ts)$ ist unitär äquivalent zur linksregulären Darstellung λ (für G lok. komp.).

(c) Es gibt eine bijektive Beziehung

$$\left\{ \text{unitäre Darst. von } G \right\} \xleftrightarrow{(1.10.1)} \left\{ \text{unitär äquivalente Darst. von } L^1(G) \right\} \xleftrightarrow{(1.10.2)} \left\{ \text{unitär äquivalente Darst. von } C^*(G) \right\}$$

$$\text{bzw. } \left\{ \text{unit. Darst. von } G \right\} \xleftrightarrow{} \left\{ \text{unit. Darst. von } C^*(G) \right\}$$

(d) Ist G diskret, so ist $C_{\text{red}}^*(G) = \overline{CG}^{\|\cdot\|_{\text{max}}}$, $\|f\|_{\text{max}} = \|\tilde{\lambda}(f)\|$
und $C^*(G) = \overline{CG}^{\|\cdot\|_{\text{max}}}$, $\|f\|_{\text{max}} = \sup \{ \|\pi(f)\| \mid \pi: CG \rightarrow \mathcal{L}(H) \text{ *-Dah.} \}$.

Das sind zwei kanonische Wege, um C^* -Normen zu erhalten.
 $\|\cdot\|_{\text{max}}$ ist räumlich („spatial“), durch eine treue Darstellung,
 $\|\cdot\|_{\text{max}}$ ist maximal, durch das Supremum über alle Darstellungen.
Diese Konzepte werden uns im Kapitel über Multiplizität und
Erweiterbarkeit wiederbegegnen.

(e) Die linksreguläre Darstellung $\tilde{\lambda}: L^1(G) \rightarrow C_{\text{red}}^*(G)$ setzt sich
zu einem *-Hom. $\lambda: C^*(G) \rightarrow C_{\text{red}}^*(G)$ fort, der jedoch
i.A. kein Isomorphismus ist. (Notation: $\tilde{\lambda} = \lambda$)

Es gilt jedoch für lok. komp. Gruppen:

λ ist ein Isomorphismus $\iff G$ ist amenable

Eine der vielen Definitionen für Amenabilität: G heißt amenable,
falls es einen Zustand $m: L^\infty(G) \rightarrow \mathbb{C}$ gibt, so dass $m(f_s) = m(f)$
für alle $f \in L^\infty(G)$, $s \in G$, wobei $f_s(t) := f(s^{-1}t)$.

G kompakt oder endlich oder abelsch $\implies G$ amenable.

(f) Die Gruppen-von-Kleene-Algebra $L(G)$ ist definiert als $L(G) := C_{\text{red}}^*(G)'' \in \mathcal{L}(L^2(G))$, also als enveloppente Von-Kleene-Algebra von $C_{\text{red}}^*(G)$ bzw. als schwacher Abschluss von $\tilde{\Sigma}(L^1(G)) \in \mathcal{L}(L^2(G))$.

(g) Ist G lokomp. und abelsch, so ist $C^*(G) \cong C_0(\hat{G})$.

Ist G diskret, so sind die Gruppen- C^* -Algebren oft anschaulicher. Insbesondere gibt es dann eine schöne Beschreibung von $C^*(G)$ als universelle C^* -Algebra.

1.13 Def: Sei G diskret. Die (volle) Gruppen- C^* -Algebra $C^*(G)$ ist die universelle C^* -Algebra, die von Unitären $u_g, g \in G$ erzeugt wird, $\wedge$ den Relationen $u_g u_h = u_{gh} \quad \forall g, h \in G$ und $u_{g^{-1}} = u_g^*$.

1.14 Bew: (a) Die Unitären $(u_g)_{g \in G}$ zeichnen genau die Gruppen-Struktur von G nach. Außerdem gilt $u_e = 1$ für das neutrale Element e von G . ($u_e^2 = u_e = u_e^*$ und $u_g u_e = u_e u_g = u_g \quad \forall g \in G$)
(b) Die Definition 1.9 und 1.13 stimmen für diskrete Gruppen überein.

Bew: (b) Nach der universellen Eigenschaft ex. ein Hom.

$\alpha: C^*(u_g, g \in G) \rightarrow A$, wobei $A := C^*(G)$ von Def. 1.9,
 $\wedge \quad \alpha(u_g) = \delta_g$ (siehe 1.6(b): $\delta_g \delta_h = \delta_{gh}$, $\delta_g^* = \delta_{g^{-1}}$, und 1.7(a)),
der surjektiv ist, da $\mathbb{C}G \subseteq A$ dicht ist.

(Zu $x \in A, \varepsilon > 0$ ex. $y \in L^1(G)$ mit $\|x - y\| < \varepsilon$ nach Def. 1.9.

Zu y ex. $z \in \mathbb{C}G = \ell_c(G) \wedge \|y - z\| < \|y - z\|_1 < \varepsilon$ nach 1.6(d), 1.6(e).
Also $\|x - z\| < 2\varepsilon$.)

Ist nun $\pi: C^*(u_g, g \in G) \hookrightarrow \mathcal{L}(H)$ eine treue Darst.,
so ist $\tilde{\pi}: G \rightarrow \mathcal{L}(H), \tilde{\pi}(g) := \pi(u_g)$ eine nat. Darst. von G .
Dies induziert eine Darst. $\tilde{\alpha}: A \rightarrow \mathcal{L}(H)$ nach 1.10(a).

Also kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} C^*(u_g, g \in G) & \xrightarrow{\alpha} & A \\ \searrow \pi & \hookrightarrow & \downarrow \tilde{\alpha} \\ & & \mathcal{L}(H) \end{array} \quad \text{D.h. } \alpha(x) = 0 \Rightarrow \pi(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

1.15 Bsp.: Es gilt $C^*(\mathbb{Z}) = C^*(u_n, n \in \mathbb{Z} \mid u_n \text{ unitär, } u_m u_n = u_{m+n}, u_{-n} = u_n^*)$

Also ist $u_0 = 1$ und $u_n = (u_1)^n$ für $n > 0$, $u_n = (u_1^*)^{|n|}$ für $n < 0$.

Somit ist $C^*(\mathbb{Z}) = C^*(u_1 \text{ unitär}) = C^*(S^1)$. (C^* -Alg. Bsp. 7.3)

Da $\mathbb{Z}$ abelsch ist, ist $\mathbb{Z}$ amenable, also $C^*(\mathbb{Z}) = C_{\text{red}}^*(\mathbb{Z})$.

1.16 Bsp.: Die freie Gruppe $\mathbb{F}_2$ mit zwei Erzeugern x und y ist nicht amenable, also $C^*(\mathbb{F}_2) \neq C_{\text{red}}^*(\mathbb{F}_2)$.

Man hat $C^*(\mathbb{F}_2) = C^*(u, v \text{ unitär})$. Hierbei haben u und v keinerlei Relationen zueinander. Als Gruppe kann man $\mathbb{F}_2$ als freies Produkt von $\mathbb{Z}$ mit sich selbst schreiben. Hierbei ist $G_1 * G_2$ definiert als die Gruppe, die aus Elementen von G_1 und Elementen von G_2 besteht, ohne weitere Relationen, also aus Wörtern $a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_k b_k$, $a_i \in G_1, b_i \in G_2$.

Sind G_1, G_2 diskret, so kann man sehen: $C^*(G_1 * G_2) = C^*(G_1) *_{\otimes} C^*(G_2)$

(Ermey: $A *_{\otimes} B$, das unitale freie Produkt nach C^* -Alg. Def. 7.17)

Dann $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ und also $C^*(\mathbb{F}_2) = C^*(\mathbb{Z}) *_{\otimes} C^*(\mathbb{Z})$
 $= C^*(S^1) *_{\otimes} C^*(S^1)$.

Die Gruppen- C^* -Algebren (wie auch die zugehörigen von-Neumann-Algebren) sind Gegenstand vieler Untersuchungen und ein sehr wichtiges Beispiel.

Einige Eigenschaften:

- $C^*(\mathbb{F}_2)$ und $C_{\text{red}}^*(\mathbb{F}_2)$ haben keine Spuren.
- $C^*(\mathbb{F}_2)$ und $C_{\text{red}}^*(\mathbb{F}_2)$ sind projektionslos. (Letzteres war bis 1982 ein hartes Problem)
- $C_{\text{red}}^*(\mathbb{F}_2)$ ist einfach.

(Zur Erinnerung: Kaplansky fragte 1958 nach einem Beispiel einer einfachen, unital, projektionslosen C^* -Algebra. Diese Frage wurde erst 1981 mit einem Beispiel von Blackadar und 1982 mit dem natürlichen Bsp. $C_{\text{red}}^*(\mathbb{F}_2)$ beantwortet. Dass $C_{\text{red}}^*(\mathbb{F}_2)$ einfach ist, zeigte Powers 1975, die Projektionslosigkeit konnte erst 1982 von Pimsner und Voiculescu mit Hilfe von K -Theorie (die gerade im Entstehen war) gezeigt werden.)
 (S. auch die Vorlesung von C^* -Alg., Prop. 8.14)