

§3 Einführung in die K-Theorie

- Motivation:
- „K-Theorie hat das Studium von Operatoralgebren revolutioniert“ (Blackadar, K-Th. für Op. Al., Vorwort)
 - Die K-Theorie wurde von Atiyah und Hirschman (1960er) entwickelt und in den 1970ern in die Theorie der C^* -Algebren eingeführt. Parallel wurde die K-Homologie bzw. die EAT-Theorie entwickelt (Brown, Douglas, Fillmore). Kasparov hat beides dann in der KK-Theorie zusammengeführt (1980er).
Es gibt noch andere Varianten, wie die E-Theorie von Connes und Higson (90er), bivariante K-Theorie, equivariante K-Theorie (die Gruppenwirkungen einbezieht), etc.
 - Idee: Funktoren $K_i: \{C^*\text{-Algebren}\} \rightarrow \{\text{abelsche Gruppen}\}$ für $i=0,1$, mit so schönen Eigenschaften, dass die Definition von K_0 und K_1 „fast egal“ ist – für viele Zwecke reichen die Rechenregeln von K_0 und K_1 zusammen mit einer Normierung auf ein paar Basisfälle.
 - Anwendungen:
 - AF-Algebren oder Kriegl-Algebren sind komplett durch ihre K-Theorie (plus ein bisschen naheliegender Struktur) bestimmt. (Elliott 70er, Kriegl 90er, Phillips 2000)
 - Powers und Voiculescu zeigten 1982 mit Hilfe der K-Theorie, dass $C_{red}^*(\mathbb{F}_2)$ projektivfrei ist. Dies bestätigte eine sehr alte Vermutung von Kadison, dass $C_{red}^*(\mathbb{F}_2)$ ein (rechter) Besselring einer projektivfreien, einfachen C^* -Algebra ist.
(aus dem Vorwort von Powers, Larsen, Lueker)
 - Die topologische K-Theorie (von Atiyah und Hirschman) ist das „Studium von Vektorbündeln mit algebraischen Methoden“, eine Theorie der projektiven Moduln. (Blackadar, Op. Algebren, Kap V)
Insoweit spielen Projektionen auch für die K-Theorie von C^* -Algebren eine sehr wichtige Rolle (K_0). Die zweite wichtige Klasse von Elementen sind Unitäre (K_1), als (innere) Automorphismen bzw. invertierbare Elemente. (Zur topol. K-Th. siehe Blackadar, K-Theorie für Op. Algebren, §1)

Da Unitäre und Projektoren eine so wichtige Rolle spielen in der K-Theorie von C^* -Algebren, werden wir diese zunächst ein wenig studieren, besonders deren Verhalten unter der Äquivalenzrelation „Äquivalenz“ – die K-Gruppen werden aus bestimmten Äquivalenzklassen bestehen.

3.1 Def: Sei G eine topologische Gruppe. $g_1, g_2 \in G$ heißen homotop, falls es einen Pfad $\gamma: [0, 1] \rightarrow G$ gibt, der stetig ist mit $\gamma(0) = g_1$, $\gamma(1) = g_2$ erfüllt. Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf G , schreibe $g_1 \sim g_2$ oder $g_1 \sim_{\sim} g_2$ oder $g_1 \sim g_2$. Wir setzen $G_0 := \{g \in G \mid g \sim e\}$, die wegweise Zusammenhangskomponente des neutralen Elements $e \in G$.

3.2 Bem: $G_0 \subseteq G$ ist eine Untergruppe.

Bew: $g \sim e$. Dann $g^{-1} \sim e$ per $\gamma^{-1}(t) := \gamma(t)^{-1}$, also $g^{-1} \in G_0$.
(Da G eine topologische Gruppe ist, ist die Inversion stetig.)
Für $g_1 \sim e$, $g_2 \sim e$ ist $g_1 g_2 \sim e$.

3.3 Def: Sei A eine unitäre C^* -Algebra. Setze $U(A) := \{u \in A \text{ unitär}\}$. Dies ist eine topologische Gruppe mit der Normtopologie (siehe Prop. 2.4 von C^* -Alg. I). Setze $U_0(A) := \{u \in U(A) \mid u \sim 1\}$. (Beachte: Homotopiepfade müssen aus Unitären bestehen!)

3.4 Lemma: Sei A eine unitäre C^* -Algebra, $u \in U(A)$.

$$(a) \|1 - u\| < 2 \Rightarrow \exists h = h^* \in A \text{ mit } u = e^{ih}$$

$$(b) U_0(A) = \{e^{ih_1} \cdots e^{ih_n} \mid h_1, \dots, h_n \in A \text{ selbstadjungiert, } n \in \mathbb{N}\}$$

(c) $\phi: A \rightarrow B$ surj. $*$ -Hom., B ebenfalls unitäre C^* -Algebra, ϕ unit. Dann ist $\phi|_{U_0(A)}: U_0(A) \rightarrow U_0(B)$ surjektiv.
(bzw. $\phi(U_0(A)) = U_0(B)$)

Bew: (a) $-1 \notin \operatorname{Sp} u \in S^1$. Somit ist $e^{i\cdot}: [0, 2\pi) \setminus \{\pi\} \rightarrow S^1 \setminus \{-1\}$ invertierbar. A stetige Umkehrfunktion arg. Nach dem Funktionalkalkül ist somit $h := \arg(u)$ wohldefiniert und reell, und $e^{ih} = e^{i \arg(u)} = u$. (Bleib 2, A2 von C^1 -Alg. I)

(b) " $\supset$ ": Mit $\gamma(t) = e^{it h_1} \dots e^{it h_n}$, $t \in [0, 1]$ ist $e^{ih_1} \dots e^{ih_n} \sim 1$

" $\subseteq$ " Für $u \sim 1$ wähle Partition $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ mit

$$\|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| < 2. \text{ Dann gilt}$$

$$u = \gamma(1) = \underbrace{\gamma(t_n) \gamma(t_{n-1})^{-1}}_{= e^{ih_n}} \underbrace{\gamma(t_{n-1}) \gamma(t_{n-2})^{-1}}_{= e^{ih_{n-1}}} \dots \underbrace{\gamma(t_1) \gamma(t_0)^{-1}}_{= e^{ih_1}} \underbrace{\gamma(t_0)}_1$$

$$\text{Denn } \|\gamma(t_i) \gamma(t_{i-1})^{-1} - 1\| = \|\underbrace{(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) \gamma(t_{i-1})^{-1}}_{\uparrow}\| \leq 2. \quad (\|u\|=1 \text{ für unitär})$$

(c) $\sigma(U_0(A)) \subseteq U_0(B)$: $\sigma(e^{ih}) = e^{i\sigma(h)}$

" $\supset$ ": Sei $w = e^{ih_1} \dots e^{ih_n} \in U_0(B)$. Dann existieren

$$h_i' \in A \text{ mit } \sigma(h_i') = h_i. \text{ Setze } g_i := \operatorname{Re} h_i' = \frac{h_i' + h_i'^*}{2}.$$

$$\text{Also } g_i = g_i^*, \sigma(g_i) = h_i, \sigma(e^{ig_1} \dots e^{ig_n}) = w.$$

L

3.5 Prop.: (a) $U_0(M_n(\mathbb{C})) = U(M_n(\mathbb{C}))$.

(b) Ist A unital, so ist $U_0(A)$ eine normale Untergruppe von $U(A)$.

(d) $U_0(A)$ ist offen und abgeschlossen in $U(A)$

Bew: (a) Für $a \in M_n(\mathbb{C})$ ist $\operatorname{Sp} a = \{\text{Eigenwerte von } a\}$ endlich.

Also ist für $u \in M_n(\mathbb{C})$ unter dem Zwang des Logarithmus stetig.

(b) $u \in U_0(A)$, $v \in U(A)$, dann $uv \sim 1$ und somit $vuv^{-1} \sim 1$.

(d) $U_0(A)$ offen: $u \in U_0(A)$, $u' \in U(A)$ mit $\|u - u'\| < 2$. Dann $\|1 - u'^{-1}u\| < 2$, also $u'^{-1}u \in U_0(A) \Rightarrow u' \in U_0(A)$. Bew.: $u' \sim u u'^{-1}$.

$U_0(A)$ abgeschl.: $U_0(A) \ni u_n \rightarrow u \in U(A)$, dann $\|u_n - u\| < 2$

für n groß genug, also $u_n^{-1}u \in U_0(A) \Rightarrow u \in U_0(A)$

L

(c) $u, v \in U(A)$, $\|u - v\| < 2 \Rightarrow u \sim v$

$$\left[\|1 - u^*v\| < 2 \xrightarrow{3.4} u^*v \sim 1, \text{ d.h. } \underbrace{u(u^*v)}_v \sim u \right]$$

3.6 Lemma: A unital, $u, v \in A$ unitary. Dann

$$\begin{pmatrix} u & v \\ & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} uv & \\ & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} v^*u & \\ & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} v & \\ & 1 \end{pmatrix} \in U(M_2(A)), \text{ wobei } \begin{pmatrix} u & \\ & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

Bew: $\begin{pmatrix} u & v \\ & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ per $w(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Also $\begin{pmatrix} u & v \\ & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -u & -v \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} uv & \\ & 1 \end{pmatrix}$
 $\left(\text{per } e^{it} \begin{pmatrix} u & v \\ & 1 \end{pmatrix}, t \in [0, \pi] \right)$

$\hookrightarrow$ Ebenso $\begin{pmatrix} u & v \\ & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -u & -v \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & u \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} v & u \\ & 1 \end{pmatrix}.$

3.7 Bemerkung: A unital. Ist $z \in A$ invertierbar, so auch $|z| := (z^*z)^{\frac{1}{2}}$ und $w(z) := z|z|^{-1}$ ist unitär ($w(z)^*w(z) = w(z)w(z)^* = 1$).

Außerdem $z = w(z)|z|$. Es gibt also eine Beziehung zwischen invertierbaren Elementen und Unitären.

Für $w: GL(A) \rightarrow U(A)$ gilt $w(u) = u \forall u \in U(A)$, w ist stetig und $w(z) \sim_u z \forall z \in GL(A)$.

Nun zu den Projektionen. Hier definieren wir zwei Äquivalenzrelationen, die "fast äquivalent" sind.

3.8 Def: $p, q \in A$ Projektionen. (Dh. $p = p^2 = p^*$)

$p \sim q$ Murray-vonNeumann-Äquivalenz: $\Leftrightarrow \exists v \in A: v^*v = p, vv^* = q$

$p \sim_2 q$ homotop: $\Leftrightarrow \exists \gamma: [a, b] \rightarrow \{\text{Proj. in } A\}$ stetig, $\gamma(a) = p, \gamma(b) = q$

3.9 Bew: (a) $v \in A$ mit $v^*v = p, vv^* = q$ ist eine partielle Isometrie, dh. $v = vv^*v$ bzw. für $v \in \perp(H)$ ist $v: p\mathcal{H} \rightarrow q\mathcal{H}$ Isometrie (siehe Blatt 1b, C^* -Algebra I).

(b) " $\sim$ " ist eine Äquivalenzrelation. $p = v^*v \sim vv^* = q = w^*w \sim ww^* = r$
 $\Rightarrow p \sim r$ per $z := wv$ ($z^*z = v^*(vv^*)v = p, zz^* = w(w^*w)w^* = r$)

(c) Sind $e, f, e', f' \in A$ Projektoren mit $e \perp f, e' \perp f'$ (d.h. $ef=0$) und $e \sim e', f \sim f'$, so ist auch $e+f \sim e'+f'$.

Sei $v^{\pm}v=e, vv^{\pm}=e', w^{\pm}w=f, ww^{\pm}=f'$. Dann ist

$$w^{\pm}v = w^{\pm} \underbrace{w} \underbrace{v^{\pm}v}_{=e} = w^{\pm}f^{\pm}e^{\pm}v = 0. \quad \text{Also } (v+w)^{\pm}(v+w) = v^{\pm}v + w^{\pm}w = e+f, (v+w)(v+w)^{\pm} = e'+f'$$

$$\quad (v+w)^{\pm}(v+w) = v^{\pm}v + w^{\pm}w = e+f, (v+w)(v+w)^{\pm} = e'+f'$$

15.5.2012

3.10 Lemma: Sei A eine C^* -Algebra, $e, f \in A$ Projektoren.

(a) $\|e-f\| < 1 \Rightarrow \exists u \in U_0(A)$ mit $ueu^{\pm} = f$ (insbes. $e \sim f$)

(b) $e \sim_h f \Leftrightarrow \exists u \in U_0(A)$ mit $ueu^{\pm} = f$
(insbes. $e \sim_h f \Rightarrow e \sim f$)

Bew: (a) $x := 2e-1, y := 2f-1$ Selbstadjungiert, unitär, $x^2=y^2=1$, also x und y symmetrisch (Idee: $e: \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}, x: \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$)

$$\|1-xy\| = \|x(x-y)\| \leq \|2(e-f)\| < 2$$

3.4(a) $\Rightarrow \exists h = h^{\pm} \in A$ mit $xy = e^{ih}$ und $yx = (xy)^{\pm} = e^{-ih}$

Da x unitär ist, ist $a \mapsto xax = xax^{\pm}$ ein Isomorphismus von A , also gilt mit $f(xy) = \frac{1}{i} \log(xy) = h, f((xy)^{\pm}) = -h$

$$\text{Folgendes: } xhx = \alpha(f(xy)) = f(\alpha(xy)) = f(x^2yx) = f((xy)^{\pm}) = -h$$

Setze $u := e^{-i\frac{h}{2}} \in U_0(A)$ (also „ $u = \sqrt{yx}$ “)

$$\text{Dann } uxu^{\pm} = x \underbrace{x e^{-i\frac{h}{2}} x}_{\substack{\uparrow \\ 3.4(b)}} e^{i\frac{h}{2}} = x e^{i\frac{h}{2}} e^{i\frac{h}{2}} = xxy = y$$

(weiter: $g(h) = e^{-i\frac{h}{2}}$, dann $\alpha g(h) = g\alpha(h) = g(-h) = e^{i\frac{h}{2}}$)

$$\text{und } ueu^{\pm} = \frac{uxu^{\pm} + 1}{2} = \frac{y+1}{2} = f.$$

(b) " $\Rightarrow$ "
 $t \mapsto p_t, t \in [0, 1]$ stetige Familie von Projektionen in A
 mit $p_0 = e, p_1 = f$. Wähle eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$
 mit $\|p_{t_i} - p_{t_{i-1}}\| < 1 \stackrel{(a)}{\Rightarrow} \exists u_i \in U_0(A) \text{ mit } u_i p_{t_{i-1}} u_i^* = p_{t_i}$

Dann ist $u_i = u_{i-1} \dots u_1 \in U_0(A)$ und

$$u e u^* = u_n \dots \underbrace{u_1 p_0 u_1^*}_{p_{t_1}} \dots u_n^* = p_{t_n} = f.$$

" $\Leftarrow$ " Sei nun p_t für $u_t, t \in [0, 1], u_0 = 1, u_1 = u$.

Dann $t \mapsto u_t e u_t^*$ Homotopie von Projektionen A zu f

L

3.11 Lemma: A C^* -Algebra, $e, f \in A$ Projektionen.

Dann ist $A \cong \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(A)$ C^* -Unteralgebra und

$$e \sim_A f \text{ in } M_2(A) \iff e \sim f \text{ in } A$$

$$(\text{d.h. } (e \ 0) \sim_2 (f \ 0))$$

Also bz auf Übergang zu Matrizen: " $\sim = \sim_2$ "

Bew: " $\Rightarrow$ " Nach 3.10 ex. $u \in U_0(M_2 \tilde{A})$ mit $u e u^* = f$ (bzw. $M_2 A \in M_n$)
 mit $v := u e \in A \in M_2 \tilde{A}$ mit $v^* v = e, v v^* = u e u^* = f$.

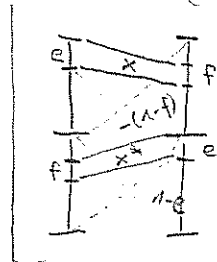
$$(\text{Beachte: } v = (u e u^*) u e = f u e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A)$$

" $\Leftarrow$ " Sei $x \in A$ mit $x^* x = e, x x^* = f$. Dann ist $u := \begin{pmatrix} x & -(1-f) \\ 1-e & x^* \end{pmatrix}$

$$\text{unitär und } u \sim_2 u \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \sim_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{via } u \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\text{bzw. } \begin{pmatrix} (1-f) + \cos t f & \sin t x \\ -\sin t x^* & (1-e) + \cos t e \end{pmatrix}, t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$



$$\text{Nach 3.10 also } (e \ 0) \sim_2 u (e \ 0) u^* = (f \ 0)$$

$$\text{Nebenrechn.: } u \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-f) & x \\ -x^* & (1-e) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & -(1-f) \\ (1-e) & x^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* & (1-e) \\ -(1-f) & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f + (1-f) & 0 \\ 0 & (1-e) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x(1-e) &= x x^* x (1-e) = x e (1-e) \\ &= 0 \end{aligned}$$

L

LL

3.12 Def: Sei A eine C^* -Algebra. Setze

$$M_\infty(A) := \{(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}} \mid a_{ij} \in A, a_{ij} = 0 \text{ endlich oft}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n(A)$$

mit $M_n(A) \subseteq M_{n+1}(A)$ per $x \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3.13 Bem: $M_n(A) \subseteq M_\infty(A)$ per $\{(a_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}} \mid a_{ij} = 0, i > n \text{ oder } j > n\}$

Also besitzt $M_\infty(A)$ eine C^* -Norm $\|x\| = \|x\|_{M_n(A)}$ für $x \in M_n(A) \subseteq M_\infty(A)$.
 Ist hiermit jedoch nicht vollständig.

3.14 Def: Setze $H(A) := \{[p] \mid p \text{ Projektion in } M_\infty(A)\}$
 (d.h. $\exists n: p \in M_n(A) \text{ Proj.}$)

und $[\cdot]$ Äquivalenzklasse bzgl. $\sim_n$ oder $\sim$ in $M_\infty(A)$.

(nach 3.11 ist $p, q \in M_\infty(A) \Rightarrow p, q \in M_n(A)$ für n groß,

dann $p \sim_q$ in $M_n(A) \subseteq M_\infty(A) \stackrel{3.11}{\Rightarrow} p \sim_{2n} q$ in $M_{2n}(A) \subseteq M_\infty(A)$

Und $p \sim_{2n} q$ in $M_n(A) \subseteq M_\infty(A) \Rightarrow p \sim_{2n} q$ in $M_2(M_n(A)) \stackrel{3.11}{\Rightarrow} p \sim_q q$ in $M_\infty(A)$)

3.15 Prop.: $H(A)$ ist eine abelsche Halbgruppe per

$[p] + [q] := [p' + q']$, wobei $p' q' \in M_\infty(A) \text{ Proj.}$ & $p \sim p', q \sim q', p' q' = 0$.

und neutralem Element $[0]$.

Bew: wohldef: Seien $p, q \in M_n(A) \text{ Proj.}$ Setze $p' := \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, q' := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$.

Dann ist $p \sim p'$ und $q \sim q'$ (per $v := uq', u := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ in M_{2n}), $p' q' = 0$.

Seien nun p'', q'' mit $p \sim p'', q \sim q'', p'' q'' = 0$, dann gilt

$$p' \sim p'', q' \sim q'', p' \perp q', p'' \perp q'' \stackrel{3.9(c)}{\Rightarrow} [p' + q'] = [p'' + q'']$$

[Assoz., Kommutativität, neutr. El.] ✓

3.16 Bem (Grothendieckgruppe): Sei H eine abelsche Halbgruppe.

Setze $G(H) := \frac{H \times H}{\Delta}$ wobei $\Delta := \{(x, x) \mid x \in H\}$ Diagonale.

Mit anderen Worten, in $H \times H$ gilt:

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) : \Leftrightarrow \exists z_1, z_2 \in \Delta : (a_1, b_1) + z_1 = (a_2, b_2) + z_2$$

[Bsp.: $(\mathbb{N}, +)$ ergibt $G(\mathbb{N}) \cong \mathbb{Z}$ per $(n, m) \mid n, m \in \mathbb{N} \mapsto n - m \in \mathbb{Z}$

Dann ist $G(H)$ die einheitliche Grothendieckgruppe zu H .

Man hat $-(a, b)^* = (b, a)^*$, denn $(a, b) + (b, a) = (a+b, a+b) \in \Delta$, d.h.

$$[(a, b)^* + (b, a)^*] = [(a+b, a+b)]^* = 0 \text{ neutr. El. in } G(H). \Rightarrow G(H) \text{ ist Gruppe!}$$

Ansonsten ist $G(H)$ abelsch.

Man hat folgende Grothendieck-Abbildung: $\varphi: H \rightarrow G(H)$
 $a \mapsto (a+x, x)^*$ $\leftarrow$ b.d.

Mit $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$. Die Abbildung ist jedoch weder injektiv noch surjektiv. Sie hat folgende universelle Eigenschaft:

Ist $\varphi: H \rightarrow G$ ein Halbgruppenhom. in eine Gruppe G , so ex.

genau ein Gruppenhom. $\alpha: G(H) \rightarrow G$ mit $\alpha((a, b)^*) = \varphi(a) - \varphi(b)$,

also

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\varphi} & G(H) \\ & \searrow \alpha & \swarrow \exists! \alpha \\ & G & \end{array}$$

Dieser sind die Elemente in $G(H)$ der Form

$$\varphi(x) - \varphi(y) \text{ für } x, y \in H. \quad (\text{auch: } (a, b)^* = \frac{(a+b, b)^*}{\varphi(a)} = \frac{(a+b, a)^*}{\varphi(b)})$$

Die Grothendieckkonstruktion ist außerdem funktoriell:

Ist $\alpha: H \rightarrow H'$ ein Homomorphismus von Halbgruppen, so ex.

genau ein Gruppenhom. $G(\alpha): G(H) \rightarrow G(H') \rightarrow A$

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\alpha} & H' \\ \varphi \downarrow & \hookrightarrow & \downarrow \varphi' \\ G(H) & \xrightarrow{G(\alpha)} & G(H') \end{array}$$

3.17 Def.: Sei A eine unital C^* -Algebra. Setze

$$K_0(A) := G(H(A)) = \{ ([p], [q])^\circ \mid p, q \in M_\infty(A) \text{ Proj.} \}$$

3.18 Bsp.: (a) $K_0(0) = 0$ (denn $M_\infty(0) = 0$)

(b) $K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$, denn für $p, q \in M_\infty(\mathbb{C})$ Projektoren

$$\text{ist } p \sim q \iff \dim p\mathbb{C}^n = \dim q\mathbb{C}^n \iff \text{rang } p = \text{rang } q$$

(isometrisch)

Also $H(\mathbb{C}) = \mathbb{N}$ (über die Dimension $n \in \mathbb{N}$).

3.6.2012

3.19 Satz: Die Abbildung $K_0: (C^*\text{-Algebren}) \rightarrow (\text{absl. Gruppe})$ hat

folgende Eigenschaften:

(a) K_0 ist funktoriell für unital Homomorphismen.

$$\text{fdr. } \varphi: A \rightarrow B \text{ unital} \Rightarrow \exists K_0(\varphi): K_0(A) \rightarrow K_0(B)$$

$$\text{und } A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \text{ unital} \Rightarrow K_0(\psi \circ \varphi) = K_0(\psi) \circ K_0(\varphi)$$

(b) K_0 ist homotopieinvariant.

$$\text{fSind } \alpha, \beta: A \rightarrow B \text{ homotop, so ist } K_0(\alpha) = K_0(\beta)$$

$$\text{Sind } A \simeq B \text{ homotop, so ist } K_0(A) = K_0(B)$$

(Siehe Exkurs 3.20 zur Homotopie)

(c) K_0 ist additiv.

$$\text{fDie kanonischen Abbildungen } \pi_1: A \oplus B \rightarrow A, \pi_2: A \oplus B \rightarrow B$$

$$(a, b) \mapsto a, (a, b) \mapsto b$$

$$\text{ergeben einen Isomorphismus } K_0(A \oplus B) \xrightarrow[\cong]{K_0(\pi_1) \oplus K_0(\pi_2)} K_0(A) \oplus K_0(B)$$

(d) K_0 ist stabil.

$$\text{fDie kanonische Einbettung } j: A \hookrightarrow M_\infty(A) \text{ induziert einen}$$

$$x \mapsto (x, 0)$$

Isomorphismus α K -Theorie

$$K_0(A) \xrightarrow[\cong]{K_0(j)} K_0(M_\infty(A))$$

L

3.20 Exkurs (Homotopie): (a) Seien A, B unital C^* -Algebren und $\alpha, \beta: A \rightarrow B$ unital Hom. α und β heißen homotop, falls

(i) $\exists \varphi_t: A \rightarrow B$ unital Hom., $t \in [0, 1] \rightarrow \varphi_0 = \alpha, \varphi_1 = \beta$
und $t \mapsto \varphi_t(x)$ ist stetig $\forall x \in A$.

oder (ii) $\exists \varphi: A \rightarrow \mathcal{C}([0, 1], B)$ Hom. $\rightarrow \varphi_0 = \alpha, \varphi_1 = \beta$
(wobei $\text{ev}_x: \mathcal{C}([0, 1], B) \rightarrow B \rightarrow \text{ev}_x(f) = f(x)$ für $x \in [0, 1]$)

Die Bedingungen (i) und (ii) sind äquivalent.

(b) Die C^* -Algebren A und B heißen homotop, falls es Abbildungen $\alpha: A \rightarrow B$ und $\beta: B \rightarrow A$ gibt, so dass $\alpha \circ \beta \sim_2 \text{id}_B$, $\beta \circ \alpha \sim_2 \text{id}_A$.

Bsp.: $A \sim_2 \mathcal{C}([0, 1], A)$. Betrachte nämlich $\alpha: A \rightarrow \mathcal{C}([0, 1], A)$
 $x \mapsto x \cdot 1$ (konstante Fkt.)
und $\beta: \mathcal{C}([0, 1], A) \rightarrow A$
 $f \mapsto f(0)$. Dann ist $\beta \circ \alpha = \text{id}_A$ und $\alpha \circ \beta \sim_2 \text{id}_{\mathcal{C}([0, 1], A)}$.

Set $\varphi_t: \mathcal{C}([0, 1], A) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1], A)$, $\varphi_t(f)(s) := f(ts)$ für $s, t \in [0, 1]$.
(strecke also die Funktion von $[0, t]$ auf $[0, 1]$)

Dann ist $\varphi_0 = \alpha \circ \beta$ und $\varphi_1 = \text{id}_{\mathcal{C}([0, 1], A)}$

(c) Eine C^* -Algebra A heißt kontrahierbar, falls $A \sim_2 0$.

Bsp.: Ist A eine C^* -Algebra, so ist $\mathcal{C}_0((0, 1], A) = \{f \in \mathcal{C}((0, 1], A) \mid f(0) = 0\}$
kontrahierbar, denn mit $\alpha: 0 \rightarrow \mathcal{C}_0((0, 1], A)$, $\beta: \mathcal{C}_0((0, 1], A) \rightarrow 0$
 $0 \mapsto 0$ $f \mapsto f(0) = 0$
ist $\beta \circ \alpha = \text{id}_0$ und $\alpha \circ \beta \sim_2 \text{id}_{\mathcal{C}_0((0, 1], A)}$ mit $(\varphi_t)_{t \in (0, 1]}$ wie oben.

Ebenso ist $CA := \mathcal{C}_0([0, 1], A)$ kontrahierbar.

(d) Mit Satz 3.19(b) ist $K_0(\mathcal{C}([0, 1], A)) = K_0(A)$
und $K_0(CA) = 0$.

Beweis von 3.19: (a) Abbildungen in K -Theorie entstehen folgendermaßen:

$$\varphi: A \rightarrow B$$

$$\xrightarrow{\text{induziert}} M_\infty(\varphi): M_\infty(A) \rightarrow M_\infty(B), \quad (a_{ij}) \mapsto (\varphi(a_{ij}))$$

$$\xrightarrow{\text{induziert}} H(\varphi): H(A) \rightarrow H(B), \quad [p] \mapsto [M_\infty(\varphi)(p)]$$

$$\xrightarrow{\text{induziert}} K_0(\varphi): G(H(A)) \rightarrow G(H(B)), \quad ([p], [q])^* \mapsto ([M_\infty(\varphi)(p)], [M_\infty(\varphi)(q)])^*$$

$$\text{Dies zeigt auch } K_0(\varphi \circ \psi) = K_0(\varphi) \circ K_0(\psi)$$

(b) Sei $\varphi_t: A \rightarrow B$ Homotopie für $\varphi_0 = \alpha, \varphi_1 = \beta$.

Dann ist $[M_\infty(\varphi_t)(p)] = [M_\infty(\varphi_0)(p)] \quad \forall t$, also

$$A \mapsto H(A) \rightarrow H(B) \text{ konstant} \Rightarrow K_0(A) \rightarrow K_0(B) \text{ konstant.}$$

(klar: K_0 eliminiert Homotopien raus)

$$(c) M_\infty(A \oplus B) \cong M_\infty(A) \oplus M_\infty(B) \quad (\text{klar auf Matrixebene})$$

$$\Rightarrow H(A \oplus B) \cong H(A) \oplus H(B) \Rightarrow K_0(A \oplus B) \cong K_0(A) \oplus K_0(B)$$

(benutze universelle Eig. der Grothendieck-Abb.)

$$(d) M_\infty(A) \xrightarrow{M_\infty(j)} M_\infty(M_\infty(A)) \cong M_\infty(A) \quad \text{Bijektion}$$

□

$$3.21 \text{ Bspri. } K_0(M_n(\mathbb{C})) = K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$$

$$\bullet K_0(\mathbb{C}^n) = K_0(\mathbb{C} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}) = \mathbb{Z}^n$$

$$\bullet K_0(e([0,1], A)) = K_0 A, \quad K_0(\mathbb{C}A) = 0$$

3.22 Bem: Ist die C^* -Algebra nicht notwendigerweise unital,

$$\text{so setze } K_0(A) := \text{Kern } K_0(\sigma) \subseteq K_0(\tilde{A}),$$

$$\text{wobei } \sigma: \tilde{A} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (a, \lambda) \mapsto \lambda, \quad K_0(\tilde{A}) \xrightarrow{K_0(\sigma)} K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$$

Ist A unital, so ist $\tilde{A} \cong A \oplus \mathbb{C}$ und

$$K_0(\tilde{A}) = K_0(A) \oplus K_0(\mathbb{C}) \Rightarrow \text{die alte und die neue Def. stimmen überein.}$$

Satz 3.19 gilt auch für nicht-unital C^* -Algebren.