

Mit Funktionen können wir bestimmte Prozesse und Verläufe beschreiben. Der Begriff der Stetigkeit formuliert hierbei den Umstand, wenn „kleine Änderungen nur kleine Änderungen“ bewirken. Wir lernen zunächst einige grundlegende Funktionen kennen.

6.1 Polynome und gebrochen rationale Funktionen:

(a) Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ fest, so heißt

$$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \quad \text{Polynomfunktion}$$

von Grad n (wenn $a_n \neq 0$)

(b) Sind $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ und $q(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$ Polynomfunktionen, so heißt

$$f: \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

gebroschen rationale Funktion.

Beachte, dass diese Funktion nur für $x \in \mathbb{R}$ mit $q(x) \neq 0$ definiert ist.

Bsp: (a) $p_1(x) = 2x$, $p_2(x) = 5x^2 - 2$, $p_3(x) = x^3$ sind Polynome

(b) $f_1(x) = \frac{2x}{5x^2 - 2}$, $f_2(x) = \frac{x-3}{(x-1)^2}$, $f_3(x) = \frac{1}{x}$

Sind gebroschen rationale Funktionen mit Definitionsbereichen $\mathbb{R} \setminus \{\pm \sqrt{\frac{2}{5}}\}$ für f_1 , $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ für f_2 , $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ für f_3 .

6.2 Exponentialfunktion:

Ist $x \in \mathbb{R}$ und ist $a_n = \frac{x^n}{n!}$, so gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

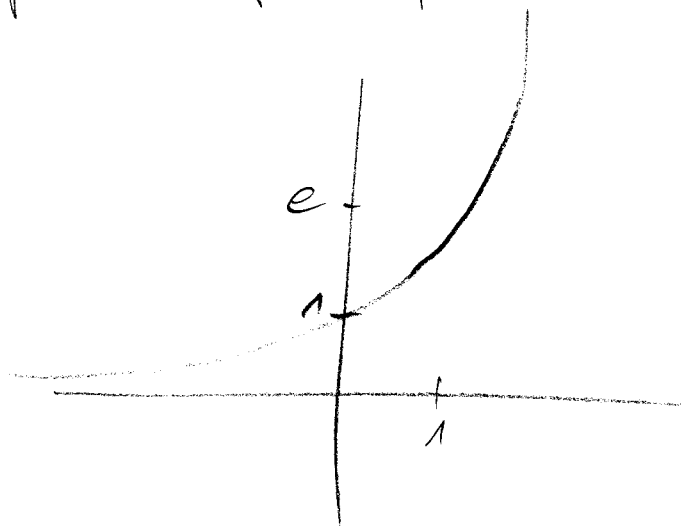
(Fakultät: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$)

Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ also und wird mit $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ bezeichnet.

Die Funktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(x)$ heißt Exponentialfunktion und hat folgende Eigenschaften:

- (1) $\exp(x+y) = \exp(x) \exp(y)$
- (2) $\exp(0) = 1$ und $\frac{1}{\exp(x)} = \exp(-x)$ (mit (1))
- (3) $\exp(x) > 0$
- (4) $\exp$ ist streng monoton wachsend, also gilt $\exp(x) < \exp(y)$ wenn immer $x < y$ ist.
- (5) $\exp(1) = e = 2,71\dots$ ist die bekannte Eulersche Zahl

Der Graph der Exponentialfunktion ist



6.3 Logarithmusfunktion:

Der Bildbereich der exp-Funktion ist das Intervall $(0, \infty)$ und hierauf existiert auch eine Umkehrfunktion, die

Logarithmusfunktion $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(1) \log(\exp(x)) = x \quad \text{und} \quad \exp(\log(x)) = x$$

Beachte: Der Logarithmus ist nur für positive $x \in (0, \infty)$ definiert

$$(2) \log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

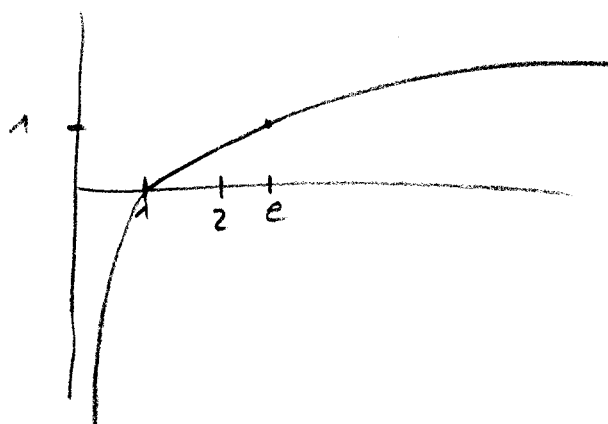
$$(\text{denn: } \exp(\log(x) + \log(y)) \stackrel{6.2(1)}{=} \exp(\log x) \exp(\log y) = x y)$$

$$\text{Also ist } \log(xy) = \log(\exp(\log(x) + \log(y))) = \log(x) + \log(y)$$

$$(3) \log(1) = 0 \quad \text{und} \quad \log(e) = 1 \quad (\text{nach 6.2(2) und 6.2(5)})$$

$$(4) \log \text{ ist streng monoton wachsend}$$

Der Graph ist



6.4 Bemerkung: Ist $a > 0$, so heißt $f_a(x) = a^x = \exp(x \cdot \log a)$

mit $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Exponentialfunktion zur Basis a .

Es gilt: $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $e^x = \exp(x)$, $1^x = 1$,

$$a^{x+y} = a^x a^y, (a^x)^y = a^{xy}.$$

Die Umkehrfunktion von $f_a(x) = a^x$ ist $\log_a: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, falls $a \neq 1$.

Es gilt: $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$, $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$,

$$\log_a(x^r) = r \log_a(x)$$

6.5 Bemerkung: Die Exponentialfunktion beschreibt sehr oft Wachstum bzw. Verfall einer Sache.

Bsp.: Nach dem Tod eines Lebewesens zerfällt das radioaktive Kohlenstoff-Isotop C_{14} mit einer Halbwertszeit von 5370 Jahren. Wie alt ist eine Mumie mit auf 35% gesunkenem C_{14} -Gehalt?

Der C_{14} -Gehalt nach t Jahren ist $G(t) = G_0 \cdot a^t$. Was ist a ? ← lebendes Mensch

$$\text{Vest } G(t+5370) = \frac{1}{2} G(t), \text{ also}$$

$$G_0 \cdot a^t \cdot a^{5370} = G_0 a^{t+5370} = G(t+5370) = \frac{1}{2} G(t) = \frac{1}{2} G_0 \cdot a^t$$

$$\text{so ist } a^{5370} = \frac{1}{2}, \text{ d.h. } 5370 \log(a) = \log(a^{5370}) = \log\left(\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Dann ist } \log(a) = \frac{\log(0,5)}{5370}, \text{ also } a = \exp\left(\frac{\log(0,5)}{5370}\right).$$

Suche nun t mit $G(t) = 0,35 \cdot G_0$, also $G_0 \cdot a^t = G(t) = 0,35 \cdot G_0$

$$\text{so ist } a^t = 0,35, \text{ d.h. } t \log(a) = \log(a^t) = \log(0,35)$$

$$\text{und daher } t = \frac{\log(0,35)}{\log(a)} = \frac{\log(0,35)}{\log(0,5)} \cdot 5370 \approx 8133.$$

Die Mumie ist also 8133 Jahre alt.

6.6 Definition: Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ der Definitionsbereich einer Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ und ist $a \in D$, dann schreiben wir $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$, falls für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$.

Dies können wir auch für $a = \pm \infty$ definieren oder für $a \in \mathbb{R}$, die „in D approximiert werden können“.

Bsp: (1) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

1.) ∞ ist approximierbar und für $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0$ (S.S.S.)
 Somit ist $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

2.) 0 ist ebenfalls approximierbar, aber für $x_n = \frac{1}{n}$ und $y_n = -\frac{1}{n}$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$, aber $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n) = -\infty$.

Also existiert $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ wicht.

3.) Für $s \in \mathbb{R}$ ist $\lim_{x \rightarrow s} f(x) = \frac{1}{s}$, denn $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$ ergibt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \frac{1}{s}$.

(2) Ist $g: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{x-3}{(x-1)^2}$, so ist $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -\infty$, denn für $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ ist $g(x_n) = \frac{1}{(x_n-1)^2} \cdot (x_n-3) \rightarrow -\infty$ für $n \rightarrow \infty$ (da $\frac{1}{(x_n-1)^2} \rightarrow \infty$ und $(x_n-3) \rightarrow -2$).

(3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ existiert wicht., denn mit $x_n = 2\pi n$ und

$y_n = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$, aber $\sin(x_n) = 0$ und $\sin(y_n) = 1$ für alle n , also $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(x_n) = 0 \neq 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(y_n)$.

(4) $f: \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 1}$. Für $x \rightarrow -1$ ist $f(x) = \frac{(x+1)(x-4)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-4}{x-1} \rightarrow \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ existiert wichtig.

(5) Für $h: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x) = \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$ ist

$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$, denn für $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

ist $-\sqrt{x_n} \leq h(x_n) \leq \sqrt{x_n}$ (denn $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$)

Nach dem Quotientenkriterium also auch $\lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = 0$.

6.7 Rechenregeln: Wie für Folgen (5.5) gelten wir:

$$(a) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow a} (\lambda f(x)) = \lambda \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \text{ falls } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

(d) entsprechend auch für $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$ in manchen Fällen

(e) „Kettenregel“: Sind $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ und $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$,

$$\text{so ist } \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$$

Bsp für (e): $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \exp(-x^2 + x)$.

Es ist $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, denn $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^2 + x) = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$.

Ist nun $a \in D$ für $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, so kann man fragen, ob $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ gilt. Das gilt genau dann, wenn f in a stetig ist.

6.8 Definition: Ist $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in D$, dann heißt f stetig in a , falls $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ gilt. Ist f in allen Punkten $a \in D$ stetig, so heißt f stetig (auf D).

Bsp: (a) Alle Polynomfunktionen bzw. allgemeiner: alle gebrochen rationalen Funktionen sind stetig auf ihrem Definitionsbereich, also beispielsweise $f(x) = 2x$ oder $f(x) = 5x^2 - 2$ auf $\mathbb{R}$, oder $f(x) = \frac{2x}{5x^2 - 2}$ auf $\mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \sqrt{\frac{2}{5}} \right\}$.

(b) Ist $a \in \mathbb{R}$ fest, so ist $f(x) = x^a$ stetig

(c) Ist $a > 0$, so ist $f(x) = a^x$ stetig

(d) $\log$, $\exp$, $\sin$, $\cos$ sind stetig

(e) Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten und Hintereinanderausführungen von stetigen Funktionen ergeben wieder stetige Funktionen. Allerdings kann sich dabei der Definitionsbereich ändern.

Die Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{\exp\left(\frac{x-3}{\sin x}\right) \cdot 4x^3 - 3}{2^x + \sqrt{x} \cdot \cos\left(\frac{3}{x^2}\right)}$ ist stetig.

6.9 Bemerkung: Gilt für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \{a\}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ und $x_n < a$, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = c$ ist, so bezeichnen wir mit $\lim_{x \nearrow a} f(x) = c$ den linkseitigen Grenzwert von f an der

Stelle a , entsprechend $\lim_{x \searrow a} f(x) = d$ für den rechtseitigen.

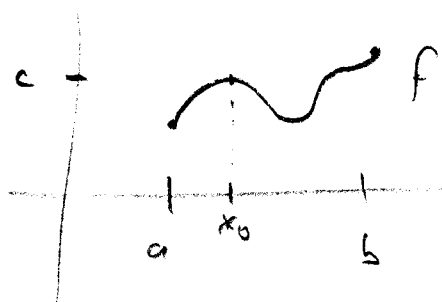
Ist $\lim_{x \nearrow a} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x) = f(a)$, so ist f stetig in a

("linkseitiger Grenzwert = rechtseitiger Grenzwert ^{= Funktionswert}, dann f stetig")

Bsp.: $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$ ist nicht stetig in 0,
da $\lim_{x \nearrow 0} h(x) = 0$, $\lim_{x \searrow 0} h(x) = 1$.

6.10 Zwischenwertsatz: Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $c \in \mathbb{R}$,
so dass $f(a) \leq c \leq f(b)$ oder $f(a) \geq c \geq f(b)$, so gibt es
einen Punkt $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = c$.

Die Funktion f nimmt also alle Werte zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.



(f muss bei c vorbei
um von $f(a)$ nach $f(b)$
zu gelangen)

Bsp.: Ist $p(x) = 5x^5 - 3x^4 + x - 1$ (oder allgemeiner ein
Polynom ungeraden Grades), so besitzt p mindestens eine
Nullstelle (in $\mathbb{R}$). Denn da $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$
ist, muss es $a, b \in \mathbb{R}$ geben mit $p(a) < 0 < p(b)$. Nach 6.10
gibt es also ein $x_0 \in [a, b]$ mit $p(x_0) = 0$.