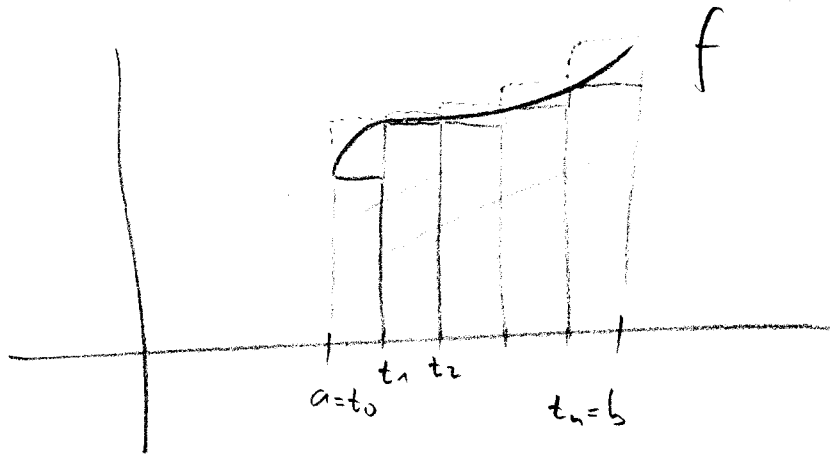


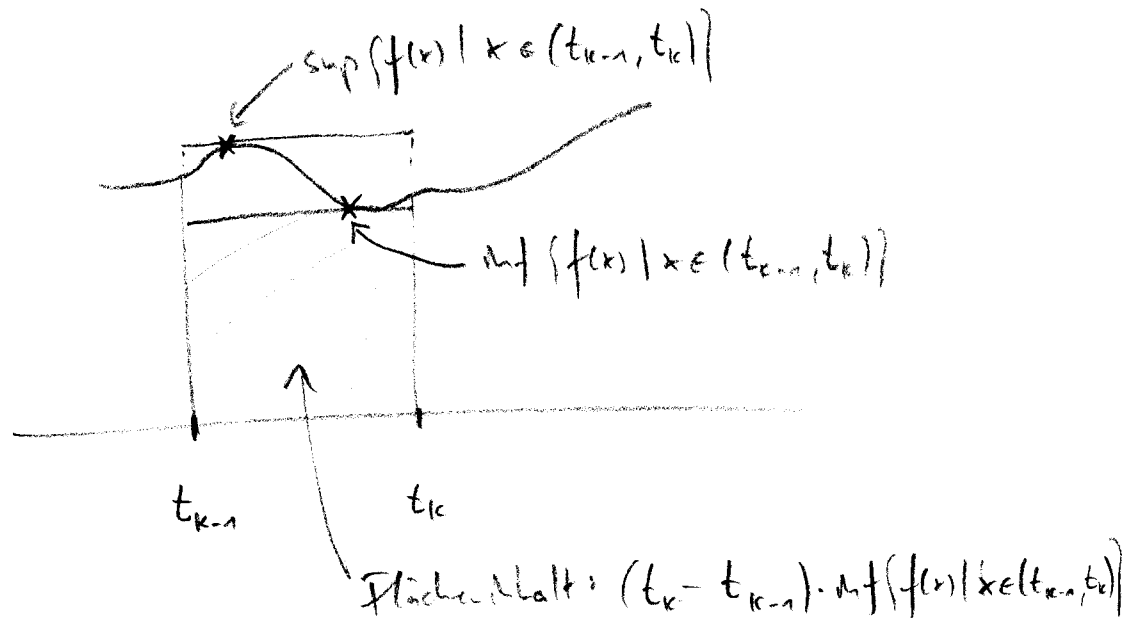
§ 8 Integration

Die Integralrechnung ist das Gegenstück zur Differentialrechnung, wie wir im Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sehen werden. Ziel ist es, den Flächeninhalt zwischen einer Funktion und der x -Achse zu bestimmen. Das bewerkstelligt man mit „unendlich feinen Summen“. Insofern ist das Integral nichts anderes als der Limes solcher Summen (daher auch das Symbol $\int_a^b$ für „ $\sum$ “, Summe)



schöpfe den Flächeninhalt durch Blöcke unterhalb des Graphen aus, genauso oberhalb. Ist die Unterteilung von $[a, b]$ fein genug, so nähert sich das dem Wert des Flächeninhalts an

Vergrößern:



8.1 Definition:

(a) Ist $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Menge und ist diese nach oben beschränkt (gibt es also eine Zahl $M > 0$, so dass $x \leq M$ ist für alle $x \in A$), so bezeichnet man mit dem Supremum $\sup A \in \mathbb{R}$ die kleinste obere Schranke von A . Es gilt also

$$(1) \quad x \leq \sup A \text{ für alle } x \in A$$

$$(2) \quad \text{Ist } M \in \mathbb{R} \text{ mit } x \leq M \text{ für alle } x \in A, \text{ so ist } \sup A \leq M.$$

(b) Ist entsprechend A nach unten beschränkt ($x \geq m$ für alle $x \in A$), so ist das Infimum $\inf A \in \mathbb{R}$ die größte untere Schranke von A mit

$$(1) \quad x \geq \inf A \text{ für alle } x \in A$$

$$(2) \quad \text{Ist } m \in \mathbb{R} \text{ mit } x \geq m \text{ für alle } x \in A, \text{ dann } m \leq \inf A.$$

(c) Ist A nach oben unbeschränkt, so setzen wir $\sup A = \infty$, entsprechend $\inf A = -\infty$, falls A nach unten unbeschränkt ist.

Ist $\inf A \in A$, so ist das Infimum sogar ein Minimum (mit $A \in \mathbb{R}$), ist $\sup A \in A$, so ist das Supremum ein Maximum.
($\max A \in \mathbb{R}$)

Bsp:

- $\inf(-1, 2] = -1$, kein Minimum, $\sup(-1, 2] = \max(-1, 2] = 2$
- $\inf \mathbb{N}_0 = \min \mathbb{N}_0 = 0$, $\sup \mathbb{N}_0 = \infty$ ($\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$)

8.2 Definition: Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion
 (gibt es also $m, M \in \mathbb{R}$ mit $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$),
 so heißt

- $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$
- $\sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \cdot \inf\{f(x) \mid x \in (t_{k-1}, t_k)\}$ Untersumme
- $\sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) \cdot \sup\{f(x) \mid x \in (t_{k-1}, t_k)\}$ Obersumme

bezüglich dieser Zerlegung

f heißt (Riemann-)Integrierbar, falls

$\inf\{\text{Obersumme bzgl. einer Zerlegung von } [a, b]\}$
 $= \sup\{\text{Untersumme bzgl. einer Zerlegung von } [a, b]\}$ gilt,
 falls sich also die Obersummen bzgl. immer feineren Zerlegungen
 genau den Untersummen annähern. Dieser Wert wird
 dann $\int_a^b f(x) dx$ bezeichnet.

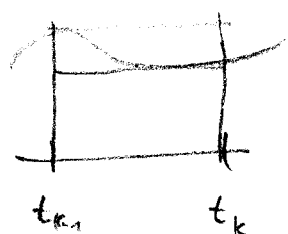
8.3 Satz: Jede stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar
 und für die äquidistante Zerlegung $t_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$, $k=0, \dots, n$

$$\text{Bz} \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f(t_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f(t_k)$$

Idee Beweis: Die Abstände zwischen den t_k sind immer gleich:

$$(t_k - t_{k-1}) = \left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) - \left(a + \frac{(k-1)(b-a)}{n}\right) = \frac{b-a}{n}$$

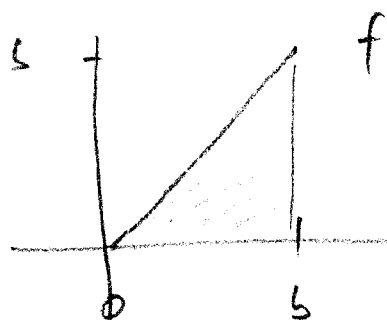
und statt $\inf\{f(x) \mid x \in (t_{k-1}, t_k)\}$ wähle einfach $f(t_{k-1})$
 oder $f(t_k)$. Für die Blöcke



kann nämlich
 sogar ein beliebiger
 Wert $f(s)$ mit
 $t_{k-1} \leq s \leq t_k$ ausgewählt
 werden.

Bsp.: Betrachte $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Da f stetig ist, ist f auch integrierbar und wir berechnen:

$$\begin{aligned} \int_0^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{k}{n} b \right) \quad \left(\text{denn } t_k = 0 + \frac{k(b-0)}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^2}{n^2} \sum_{k=1}^n k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{wie in B.4.7, A4}) \\ &= \frac{b^2}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{b^2}{2} \end{aligned}$$



$$\int_0^b f(x) dx = \frac{b^2}{2} \quad \text{ist}$$

tatsächlich der Flächeninhalt des Dreiecks Δ mit Höhe b und Breite b .

8.4 Definition: Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $F' = f$, so heißt F Stammfunktion von f .

8.5 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

(Diff.- und Integralrechnung)
also invers zueinander

Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ eine Stammfunktion von f .

Ist andererseits $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ irgendeine Stammfunktion von f , so gilt $\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a)$.

Bsp.: $\int_1^5 \frac{1}{x^2} dx = ?$ $G(x) = -\frac{1}{x}$ erfüllt $G' = f$ für $f(x) = \frac{1}{x^2}$,
also $\int_1^5 \frac{1}{x^2} dx = G(5) - G(1) = -\frac{1}{5} + 1 = \frac{4}{5}$

8.6 Rechenregeln: (a) Monotonie. Sind $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so gilt $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

(b) Linearität. Sind $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, so ist

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad \text{und} \quad \int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$
für $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) Ist $f: [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $b \in [a, c]$, so gilt

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \quad (\text{wir setzen } \int_a^a f(x) dx = 0)$$

8.7 Beispiele: (a) Ist $f(x) = c$ konstant, so ist $\int_a^b c dx = c \cdot (b-a)$

(b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ Stammfkt.

(c) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Dann $F(x) = \log|x|$ eine Stammfunktion.

(d) $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^n}$, $n \geq 2$. Dann $F(x) = \frac{1}{1-n} \frac{1}{x^{n-1}}$.

allgemein: $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Dann $F(x) = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$

Für $\alpha = \frac{2}{3}$ also $f(x) = \sqrt[3]{x}$ und $F(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{5}{3}}$

(e) $f(x) = \sin x$, dann $F(x) = -\cos(x)$, $g(x) = \cos x$, dann $G(x) = \sin x$,
 $h(x) = \exp(x)$, dann $H(x) = \exp(x)$

8.8 Bemerkung: Schreibt man $F = \int f(x) dx$, so soll das heißen, dass F eine Stammfunktion von f ist. Ist diese eindeutig?

Ja, bis auf eine Konstante: Ist F eine Stammfunktion von

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, so ist auch $G(x) := f(x) + c$ eine Stammfunktion ($G' = F' = f$).

Sind umgekehrt F, G Stammfunktionen von f , so gilt $F(x) - G(x) = c$ für alle $x \in [a, b]$.

Bsp.: - Nicht nur $F(x) = \frac{1}{2} x^2$ ist eine Stammfkt. für $f(x) = x$, sondern auch
 $G(x) = \frac{1}{2} x^2 + 7$. Also $\int x dx = \frac{1}{2} x^2$, aber auch $\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + 7$.

8.10 Substitution: Ist $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $u: [a, b] \rightarrow [c, d]$ differenzierbar & stetiger Ableitung, so gilt

$$\int_a^b f(u(t)) u'(t) dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(x) dx$$

(Ist $u(a) > u(b)$, so benutzt man $\int_a^b L(t) dt = - \int_b^a L(t) dt$)

Bsp: • $\int_a^b t e^{t^2} dt = ?$ Gute Idee: BL $u(t) = t^2$ & $u'(t) = 2t$.

Dann sollte f aber $f(t) = \frac{1}{2} e^t$ sein und also

$$\int_a^b t e^{t^2} dt = \int_a^b \left(\frac{1}{2} e^t \right) \cdot 2t dt = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} e^t dt = \frac{1}{2} (e^{b^2} - e^{a^2})$$

• $\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = ?$ Idee: Hatte man hier $\frac{x+1}{\sqrt{x}}$, so wäre

das Integral per $\frac{x+1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ lösbar.

Versuche also $u(t) = t-1$ und $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ und erhalte

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx &= \int_{u(2)}^{u(4)} f(x) dx = \int_2^4 f(u(t)) u'(t) dt = \int_2^4 \frac{t-1}{\sqrt{t}} dt \\ &= \int_2^4 \underbrace{\frac{t}{\sqrt{t}}}_{t^{\frac{1}{2}}} dt - \int_2^4 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{t}}}_{t^{-\frac{1}{2}}} dt = \left[\frac{1}{\frac{3}{2}} t^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} \right]_2^4 \\ &= \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{t} \right]_2^4 \end{aligned}$$

8.11 uneigentliche Integrale: (a) Wie können wir Funktionen $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ integrieren? Bisher ist nur $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ möglich.

Wir sagen, dass $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (uneigentlich) integrierbar ist, falls der Grenzwert $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx$ existiert.

(Anmerkung: Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \rightarrow \infty$ muss der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{x_n} f(x) dx$ existieren und muss immer den gleichen Wert ergeben, unabhängig von der Wahl der Folge)

Wir schreiben dann $\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx$
und entsprechend $\int_{-\infty}^b f(x) dx$ für $f: (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Bsp: $\int_1^R \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^R = 1 - \frac{1}{R} \rightarrow 1$ für $R \rightarrow \infty$.

Also existiert $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{1}{x^2} dx = 1$

(b) Ist $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $x=b$ nicht definiert, so können wir analog $\int_a^b f(x) dx := \lim_{r \nearrow b} \int_a^r f(x) dx$ definieren, falls der Grenzwert $\lim_{r \nearrow b} \int_a^r f(x) dx$ existiert.

Bsp: $f: (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Da $\int_r^1 f(x) dx = 2\sqrt{x} \Big|_r^1 = 2 - 2\sqrt{r} \rightarrow 2$,
für $r \rightarrow 0$
ist $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{r \rightarrow 0} \int_r^1 f(x) dx = 2$

(c) Sind beide Grenzen erfüllt, dann teilen wir das Integral auf, also bspw. für $f: (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{r \rightarrow -\infty} \arctan(x) \Big|_r^0 + \lim_{R \rightarrow \infty} \arctan(x) \Big|_0^R = \pi \end{aligned}$$