



Übungen zur Vorlesung Mathematik für
Studierende der Biologie und des Lehramtes Chemie
Wintersemester 2012/2013

Blatt 11

Abgabetermin: Freitag, 18.01.2012

Aufgabe 1

(3+4+3=10 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit und geben Sie jeweils den größtmöglichen Bereich an, auf dem die Funktion stetig ist.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto & \begin{cases} x + 1 & ; x \in (-\infty, 0] \\ \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & ; x \in (0, \pi) \\ x & ; x \in [\pi, \infty) \end{cases} \\ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto & \begin{cases} \frac{1-x^2}{x-1} & ; x \in (-\infty, 1) \\ -2 & ; x = 1 \\ 2 \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) & ; x \in (1, \infty) \end{cases} \\ h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto & \begin{cases} \frac{1}{\exp\left(\frac{1}{x^2}\right)} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

(5+5=10 Punkte)

- (a) Sei $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass ein Punkt $\xi \in [0, 1]$ existiert mit $f(\xi) = \xi$. Ein solches ξ nennt man Fixpunkt von f .

(Hinweis: Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf die Funktion $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) - x$ an.)

- (b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\exp(x) = 3x$$

(mindestens) eine Lösung $x \in (0, 1)$ hat.

(bitte wenden)

Aufgabe 3**(3+3+4=10 Punkte)**

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen in jedem Punkt x_0 ihres Definitionsbereiches auf Differenzierbarkeit und berechnen Sie gegebenenfalls die Ableitung. Verwenden Sie dazu nur die Definition der Differenzierbarkeit aus der Vorlesung.

(a) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x-1}.$

(b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3.$

(c) $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}.$

(Hinweis: Erweitern Sie den Differenzenquotienten mit $\sqrt{x} + \sqrt{x_0}$.)

Aufgabe 4**(1,5+1,5+1,5+1,5+2+2=10 Punkte)**

Bestimmen Sie jeweils den maximal möglichen Definitionsbereich D_i und berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen $f_i : D_i \rightarrow \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, 6$:

(a) $f_1(x) = x^2 \ln(1 + x^2),$ (b) $f_2(x) = \frac{\exp(x)}{x^2},$ (c) $f_3(x) = (\tan(x))^2$

(d) $f_4(x) = \frac{x^2 - 3}{\sqrt{x}},$ (e) $f_5(x) = \cos\left(\frac{xe^x}{1-x}\right),$ $f_6(x) = x^x.$

(Hinweis: Zur Erinnerung: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}.$)
